Florian SCHACHT, Dortmund

Rekonstruktionen individueller Begriffsbildungsprozesse mit Festlegungen und Inferenzen

Eine wesentliche Eigenschaft menschlichen Denkens und Handelns ist dadurch gekennzeichnet, dass Gründe auf uns eine besondere normative Kraft ausüben: Wir binden unser Verhalten, unser Denken und Tun, an Vorerfahrungen und *begründen* unser Handeln damit und führen es so auf bestimmte Prämissen zurück. Andererseits ergeben sich aus unserem Handeln Konsequenzen, die für uns bindend sind und die gleichsam unsere weiteren Handlungen, unsere Konklusionen, begründen.

So ist für viele Schüler zum Beispiel zunächst nicht klar, ob 8·4 das Gleiche sein soll wie 4·8 – immerhin ist 8:4 nicht das Gleiche wie 4:8. Hat man die Kommutativität der Multiplikation aber einmal verstanden, so macht es durchaus Sinn, auch die Gleichheit von 7·5 und 5·7 anzunehmen, ja allgemein eben $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b aus $\mathbb{R}$.

Unsere Gründe, die Prämissen, die unserem Denken und Handeln zugrunde liegen, sowie die Konklusionen, die sich daraus ergeben, üben daher eine besondere normative Kraft auf uns aus: wir binden uns an sie. Gleichzeitig sind die Prämissen und Konklusionen unseres Denkens und Tuns keinesfalls streng logisch in einem mathematischen Sinne strukturiert. Menschliches Denken folgt häufig Umwegen und Irrwegen. Und dennoch: Wir *begründen* unser Denken und Tun auf Prämissen und Konklusionen, die innerhalb unseres individuellen Begründungszusammenhangs stehen und damit in der Regel einer individuellen Logik folgen.

In diesem Beitrag wird ein theoretischer Rahmen beschrieben, der die Rekonstruktion von individuellen Begriffsbildungsprozessen auf die individuellen *Begründung*szusammenhänge von Schülerinnen und Schüler zurückführt, die ihrem mathematischen Denken und Handeln zugrunde liegen. Dazu wird einerseits die Theorie des Inferentialismus des derzeit sehr intensiv diskutierten Philosophen Robert B. Brandom (2000) genutzt. *Gründe und Konklusionen*, Brandom spricht genauer von Festlegungen (s.u.), sind die wesentlichen strukturierenden Elemente unseres Denkens und Tuns, und die Idee des Inferentialismus nimmt letztlich ihren Ausgangspunkt bei ebendieser Idee: „Im Mittelpunkt der diskursiven Praxis steht das Spiel des Gebens und Forderns von Gründen.“ (Brandom 2000, S. 242) Angereichert wird diese philosophische Theorie mit der mathematikdidaktischen Theorie der Conceptual Fields nach Gérard Vergnaud (1996). Auf diese Weise entsteht ein multiperspektivischer (und sozial-psychologischer) Theorierahmen, der sowohl zur Analyse individueller Begriffsbildungsprozesse genutzt werden kann (auf der Ebene der Rekonstruktion von Lernprozessen) als auch zur sorgfältigen Entwicklung, Strukturierung und Evaluation von Lernkontexten (auf der Ebene der Entwicklung von Unterrichtsdesigns). Das Potential des Theorierahmens wird deutlich vor dem Hintergrund einer empirischen Studie (vgl. Schacht 2012), die im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen, vgl. Leuders et al. 2011 oder Prediger et al. 2011) durchgeführt wurde. Die unterrichtlichen Gegenstände der Studie befassen sich mit der Propädeutik der Variable und stellen ihrerseits einen Ausschnitt aus dem (ebenfalls im Kontext des Projektes KOSIMA entwickelten) Schulbuch *mathewerkstatt* (Hußmann et al. 2012 und Prediger et al. 2012) dar.

Im Folgenden werden wesentliche Grundzüge des Theorierahmens entlang eines empirischen Beispiels entfächert und sein Potential somit verdeutlicht.

1. Festlegungen und Inferenzen als analytische Einheiten

Der Festlegungsbegriff geht wesentlich auf die inferentialistische Theorie nach Brandom (2000) zurück. Brandom lehnt seinen Begriff der Festlegung stark an das *Urteil* an, das Kant als die kleinste Einheit der Erkenntnis betrachtet. Festlegungen sind die zentralen analytischen Einheiten eines in Schacht (2012, siehe dazu auch Hußmann / Schacht 2009) entwickelten Theorierahmens, mit Hilfe dessen Begriffsbildungsprozesse rekonstruiert werden können. Vor dem Hintergrund der Idee, dass die diskursive Praxis implizit normativ ist, weil die beteiligten Akteure die Gründe (und zwar sowohl die eigenen als auch die der Diskurspartner) hinsichtlich ihrer *Richtigkeit* hinterfragen, spricht Brandom von Festlegungen: „Der nötige normative Grundbegriff ist der der *Festlegung*. Festgelegt zu sein ist ein normativer Status.“ (Brandom 2000, S. 242f) Für die Mathematikdidaktik wird dieses philosophische Konzept dahingehend erweitert, als es für die Rekonstruktion individueller Festlegungen (z.B. von Schülerinnen und Schülern) und damit hinsichtlich einer eher sozial-psychologischen Perspektive konkretisiert wird: „Festlegungen sind (rekonstruierte) Behauptungen in propositionaler Form, die wir für wahr halten. Damit liegen sie unseren Äußerungen und Handlungen zugrunde. Festlegungen können wir explizit machen und sie stellen eine Form praktischen *Tuns* dar. “ (Schacht 2012, S. 17) Eine wesentliche Eigenschaft von Festlegungen ist daher, dass sie unserem Handeln, unserem Denken und Tun, zugrunde liegen – sowohl implizit als auch explizit. Die Rekonstruktion von Lernprozessen mit Hilfe von Festlegungen als analytische Einheit wird demnach im Wesentlichen über die Rekonstruktion von individuellen Festlegungen erfolgen, die die Schülerinnen und Schüler beim Mathematiktreiben eingehen.

Karin, eine Schülerin in einer sechsten Klassen an einem Gymnasium, wird in einer Interviewsituation das Punktmuster in Abbildung 1 vorgelegt. Auf die Frage, wie viele Punkte die 10. Stelle der Punktmusterfolge zu sehen seien, umkreist sie zunächst 6 Punkte im dritten Folgenglied (vgl. Abb. 1). Karin sagt: *Hier kommen ja noch 7 mal von diesen 6-Dingern dazu. 7·6 sind 42. 42 und dann plus die!* Dabei zeigt sie auf alle Punkte der dritten Stelle.

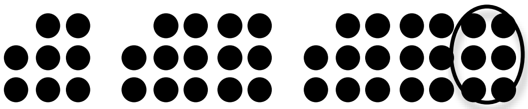	Die Regel des dynamischen Punktmusters kann beschrieben werden durch 2+6x.
Stelle 1 Stelle 2 Stelle 3	

Abbildung 1: Rekonstruktion der individuellen Festlegung (1) von Karin

Dieser Ausschnitt erlaubt einen kleinen Einblick in Karins Lernprozess. Sie identifiziert zunächst das Bildungsgesetz der Punktmusterfolge: Es werden bei jedem Folgenglied 6 Punkte hinzugefügt. Karin umkreist 6 Punkte und benennt sie schließlich mit dem Begriff „*6-Ding*“. Als Karin nach der Anzahl der Punkte der 10. Stelle gefragt wird, nutzt sie dieses Bildungsgesetz und stellt heraus, dass noch sieben weitere „*von diesen 6-Dingern*“ hinzugefügt werden. Sie berechnet das Produkt 7·6=42 und beschreibt, wie man die Gesamtzahl der Punkte der 10. Stelle dann berechnet: „*42 und dann plus die!*“ Karin macht in diesem Ausschnitt einige Gründe für ihr mathematisches Tun explizit. Sie beschreibt zunächst einige ihrer Prämissen, indem sie das Bildungsgesetz der Zahlenfolge benennt. Die arithmetische Struktur des obigen dynamischen Punktmusters ergibt sich aus der Folge 2+1·6, 2+2·6, 2+3·6,... Aus Karins Äußerungen lässt sich die folgende Festlegung (1) rekonstruieren: *Die Regel des dynamischen Punktmusters kann beschrieben werden durch 2+6·x.* Die geometrischen Muster (6-Ding) dienen ihr dabei zur Beschreibung der allgemeinen arithmetischen Struktur.

Zwar verfügt Karin zu dem Zeitpunkt des Interviews noch nicht über einen expliziten Variablenbegriff, gleichwohl lässt ihre Beschreibung und ihre Argumentation darauf schließen, dass sie das Bildungsgesetz der Punktmusterfolge erkannt hat und die allgemeine Termstruktur (zumindest implizit) nutzt, um die Anzahl der Punkte im 10. Folgeglied in expliziter Form direkt anzugeben (im Unterschied zu einer rekursiven Bestimmung der Anzahl des 10. Folgegliedes, indem sie z.B. durch sukzessives Addieren von 6 Punkten die Anzahl bestimmt). Insofern lässt sich ihre Prämisse als wesentliche Stütze ihres individuellen Begründungszusammenhangs mit Hilfe der obigen Festlegung (2) beschreiben: *Die Regel des Wachstums kann zur Anzahlbestimmung genutzt werden*.

Anhand der obigen Situation wird auch deutlich, dass Karin Festlegungen eingeht, die sie nicht explizit benennt, z.B. die Festlegung (2). Diese Festlegung benennt Karin keinesfalls explizit, jedoch liegt sie gleichsam implizit ihrem Handeln zugrunde.

Karin macht in der obigen Szene noch eine weitere Festlegung explizit, die deutlich macht, inwiefern rekonstruierte Festlegungen inferentiell miteinander verknüpft sind, die Karin für wahr hält: Weil der Folge das von ihr erkannte Bildungsgesetz zugrunde liegt, ergibt sich die Anzahl der Punkte des 10. Folgegliedes aus der Anzahl der Punkte im dritten Folgeglied und 42(=7·6). Karin benennt hier ihre Konklusion und zeigt auf, welche Folgerungen sich aus ihren Prämissen ergeben. Sie *begründet* die Konsequenzen mit der folgenden Festlegung (3): *Die Anzahl der Punkte an der 10. Stelle ergibt sich aus der Summe der Anzahl der Punkte an der 3. Stelle und 7 mal dem Zuwachs.*

Sichtbar wird hier, inwiefern Begriffsgebrauch und das Eingehen von Festlegungen miteinander zusammenhängen. Die Bedeutung von Begriffen ist ohne die Rekonstruktion der jeweiligen Festlegungen, in die sie eingebunden sind, nicht verstehbar. Welche Bedeutung der Begriff des *6-Ding* für Karin beispielsweise hat, dass er in fundamentaler Weise mit dem Konzept der Regel und des geometrischen Musters zusammen hängt, die der Punktmusterfolge zugrunde liegt, lässt sich ohne die Festlegungen, in die dieser Begriff eingebunden ist, nicht verstehen.

Eine weitere Eigenschaft von Festlegungen als analytische Einheit wird hier deutlich: sie sind inferentiell miteinander verbunden. Die Festlegungen (1) und (2) stehen nicht in isolierter Weise nebeneinander. Vielmehr wurde oben bereits hervorgehoben, dass die Festlegung (1) eine Prämisse darstellt, aus der Karin die Festlegung (2) ableitet. Insofern sind Festlegungen immer gleichsam eingebunden in ein ganzes Festlegungsnetz. Die inferentielle Relation allerdings ist hier keinesfalls entlang einer formallogischen (inferentiellen) Verknüpfung zu verstehen. Vielmehr werden hier die individuellen Begründungszusammenhänge betrachtet und damit diejenigen Festlegungen rekonstruiert, die (für wahr gehaltene) Gründe der Schülerinnen und Schüler für das mathematische Denken und Handeln darstellen.

Über die Rekonstruktion solcher individueller Festlegungen sowie deren inferentielle Relation werden dann individuelle Begriffsbildungsprozesse rekonstruiert (vgl. Schacht 2012). Weil die Bedeutung, die wir in unserem (individuellen) mathematischen Denken und Tun den jeweiligen Begriffen zuweisen, nur verständlich wird über die Festlegungen, in denen sie verwendet werden, und die Festlegungen gleichsam inferentiell miteinander verbunden sind, wird letzthin das Begreifen eines Begriffs auf das Beherrschen seines inferentiellen Gebrauchs zurückgeführt: „Das Begreifen des *Begriffs* (…) besteht im Beherrschen seines *inferentiellen* Gebrauchs: im Wissen (in dem praktischen Sinne, daß man unterscheiden kann, und das ist ein Wissen-*wie*), worauf man sich sonst noch festlegen würde, wenn man den Begriff anwendet, was einen dazu berechtigen würde und wodurch eine solche Berechtigung ausgeschlossen wäre“ (Brandom 2001, S. 23).

Es ist eine der wesentlichen erkenntnistheoretischen Merkmale dieses Ansatzes, dass der Begriff der Inferenz bei der Rekonstruktion von Lernprozessen in den Mittelpunkt gerückt wird und der Begriff der Repräsentation in den Hintergrund tritt. Das Verstehen eines Begriffs wird hier nicht über das zunehmende Verfügen von - wie auch immer gearteten – Vorstellungen oder mentalen Repräsentationen modelliert, sondern als eine Entwicklung von Festlegungen. Auf diese Weise wird ein epistemologischer Theorierahmen der Philosophie für eine sozial-psychologische Perspektive in der Mathematikdidaktik nutzbar gemacht, die es erlaubt, individuelle Begriffsbildungsprozesse zu rekonstruieren. „Neben der Beschreibung der Lernendenperspektive dient diese Analyse andererseits der Untersuchung und Entwicklung des ‚begrifflichen Potentials' von Lernumgebungen“ (Hußmann / Schacht 2009, S. 339).

2. Die mathematikdidaktische Konzeptualisierung

Im ersten Abschnitt wurde dargestellt, inwiefern Begriffsbildungsprozesse mit Hilfe von individuellen Festlegungen rekonstruiert werden können. Das gewählte Eingangsbeispiel zeigt, inwiefern Karin die Anzahl der Punkte des 10. Folgegliedes in expliziter (statt in rekursiver) Weise bestimmt und die Situation dabei ganz wesentlich mit Hilfe geometrischer Muster strukturiert. Die Art des (individuellen) Zugriffs, den Karin wählt, um in dieser Situation mathematisch (aus ihrer Sicht) angemessen zu handeln, ist für die Einordnung der Szene von großer Bedeutung. Eine passende Konzeptionalisierung bietet G. Vergnaud mit den *concepts-in-action*: „Concepts-in-action sind diejenigen individuellen Begriffe, die in gewissen Situationen handlungsleitend sind und die uns helfen, adäquate Informationen auszuwählen.“ (Schacht 2012, S. 78, vgl. auch Vergnaud 1996) Mit Hilfe der Concepts-in-action kann demnach im Einzelfall rekonstruiert werden, welche Kategorien die Schülerinnen und Schüler wählen, um in einer Situation mathematisch zu handeln. Hier wird ein weiterer Aspekt angedeutet, der von wesentlicher Bedeutung bei der Betrachtung von Begriffsbildungsprozessen ist: Mathematisches Denken hängt nicht nur wesentlich von den individuellen Festlegungen sowie den Concepts-in-action ab, sondern auch ganz wesentlich von der (mathematischen bzw. unterrichtlichen) Situation, in der sich die Schülerinnen und Schüler bewegen. Karin beispielsweise nutzt hier den Begriff des *6-Ding*, dessen spezifische Bedeutung sich aus den Festlegungen ergibt, die Karin hier aktiviert (vgl. oben). Vergleicht man Karins Äußerungen über verschiedene Situationen hinweg, so fällt auf, dass sie ebendiesen Begriff in Situationen, wo sie allein die mathematischen Strukturen von *arithmetischen* Folgen betrachtet, nicht gebraucht. Der Begriff des 6-Ding ist demnach maßgeblich an die (hier ganz konkrete) Situation der Betrachtung von Punktmusterfolgen gekoppelt. Insofern hängt unser Begriffsgebrauch ganz wesentlich von der Situation ab, in der wir uns bewegen und damit von den mathematischen Gegenständen, mit denen wir handeln: „Knowledge can be traced to the individual's way of acting with objects and dealing with situations and not only to his or her declarations. Action is the main factor in the knowing process." (Vergnaud 1990, S. 18)

Vergnauds Theorie der Conceptual Fields liefert zwei wichtige Bausteine, die die Rekonstruktion von inviduellen Begriffsbildungsprozessen mit Hilfe von Festlegungen anreichern: zentrale (sozialpsychologische) Analyseeinheiten und die forschungstheoretische Anbindung an mathematikdidaktische Erklärungsrahmen für individuelle Lernprozesse. Zum einen kann dem individuellen kategorialen Zugriff auf bestimmte mathematische Situationen dadurch Rechnung getragen werden, dass concepts-in-action rekonstruiert werden, auf die die eingegangenen Festlegungen als Prämissen bzw. Konklusionen verweisen. In Karins Beispiel sind die Concepts-in-action der Regel- und der Musterbegriff, die handlungsleitend sind. Karin setzt (beispielsweise) nicht das (geometrische) Muster bis zum 10. Folgenglied fort und zählt dann die Punkte ab. Sie nutzt hier arithmetische Zusammenhänge, um die Anzahl zu bestimmen. Gleichwohl liefert das geometrische Muster den Anlass für den Gebrauch des Begriffs *6-Ding.* Insofern aktiviert Karin hier den Blick auf Muster, um die Situation dann im Sinne des arithmetischen Regelbegriffs für sich zu bewältigen.

Mit dem vorliegenden theoretischen Zugriff kann demnach auch der Bedeutung der Situation bzw. der Lernumgebung Rechnung getragen werden. Vor diesem Hintergrund entsteht ein analytisches Tripel, bei dem jedoch die Ebene der Festlegungen die bedeutsamste ist: *Rekonstruiert werden individuellen <u>Begriffen</u> zugrunde liegende individuelle **<u>Festlegungen</u>** in spezifischen individuellen <u>Situationen</u>.*

Reiht man nun solche Festlegungsdreiecke für verschiedene Situationen im Verlauf eines Lernprozesses aneinander, so sind qualitative Aussagen über die Entwicklung der individuellen Festlegungen in Abhängigkeit von der Situation sowie der concepts-in-action möglich. Sichtbar werden zum Beispiel die Entstehung von neuen Festlegungen sowie die Auswirkungen des Eingehens mathematisch nicht tragfähiger Festlegungen und die dadurch entstehenden Hürden. Gleichzeitig lässt sich das zunehmend sich entwickelnde inferentielle Gefüge zwischen den einzelnen Festlegungen herausarbeiten.

3. Empirische Ergebnisse

Vorgestellt werden hier einige Besonderheiten der Ergebnisse der oben beschriebenen empirischen Erhebung (vgl. Schacht 2012), die im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (vgl. Leuders et al. 2011 oder Prediger et al. 2011) durchgeführt wurde.

Zunächst ist hervorzuheben, dass sich Begriffsbildungsprozesse mit Hilfe eines inferentialistischen Theorierahmens rekonstruieren lassen. Ein wesentliches Spezifikum des vorliegenden Theorierahmens ist, dass sowohl geradlinig verlaufende Begriffsbildungsprozesse von Schülern mit einem hohen Leistungspotential dargestellt werden können als auch solche, die weniger geradlinig verlaufen.

Der inferentielle Zugriff ermöglicht es, neben der analytischen Ebene noch eine weitere Ebene hinzuzuziehen. So entsprechen den individuellen Festlegungen auf der Ebene der Rekonstruktion von Lernprozessen sog. *konventionale Festlegungen* auf der Ebene der Planung oder Analyse von Fachinhalten bzw. Unterrichtsdesigns (vgl. dazu Schacht 2012). Die Analyseeinheiten zur Rekonstruktion individueller Begriffsbildungsprozesse sind auf die Analyse oder auf die planvoll angelegte Entwicklung von Unterrichtsdesigns übertragbar. Dadurch ist es prinzipiell möglich, die rekonstruierten Begriffsbildungsprozesse von Schülerinnen und Schülern mit den im Lernkontext angelegten oder intendierten (konventionalen) Festlegungen zu vergleichen. Auf diese Weise können qualitative Aussagen über die Wirksamkeit von Lernkontexten getroffen werden.

Für den konkreten vorliegenden Fall eines Schulbuchkapitels (Hußmann et al. 2012) aus der *mathewerkstatt* (Prediger et al. 2012) zur Einführung des Variablenbegriffs über die intensive Auseinandersetzung mit Punktmuster- und Zahlenfolgen konnte in diesem Zusammenhang die Wirksamkeit auf diese Weise nachgewiesen werden (vgl. Schacht 2012). Dabei lassen sich besondere Festlegungen, sog. *elementare Festlegungen*, identifizieren: Als *elementare Festlegungen* werden diejenigen konventionalen Festlegungen bezeichnet, die für einen Lernkontext ein reduziertes Festlegungsnetz aufspannen. Spezifisch für solche elementaren Festlegungen ist, dass sie (aus konventionaler Perspektive) die zentralen Lernziele abstecken. Aus individueller Perspektive lässt sich daher festhalten, dass sich Hürden von Schülerinnen und Schülern im Verlaufe von Lernprozessen insbesondere dann ergeben, wenn sie diese elementaren Festlegungen nicht eingehen. Im Kontext des oben skizzierten Beispiels wäre eine elementare Festlegung, die dem Lernkontext zugrunde liegt, z.B.: *Viele Bildmuster und Zahlenfolgen weisen Strukturen und Regelmäßigkeiten auf*. Karin äußert diese Festlegung nicht explizit, sie geht sie aber gleichsam implizit ein. Das wird dadurch deutlich, dass sie die geometrische Struktur und die arithmetische Regelmäßigkeit der Punktmusterfolge nutzt, um die Anzahl der Folgeglieder im 10. Folgenglied zu bestimmen.

Literatur

Brandom, Robert B. (2000): Expressive Vernunft. Begründung, Repräsentation und diskursive Festlegung. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Brandom, Robert (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Hußmann, Stephan / Greefrath, Gilbert / Mühlenfeld, Udo / Witzmann, Conny (2012): Wie geht es weiter? Zahlen- und Bildmuster erforschen. In Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Hußmann, Stephan / Schacht, Florian (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM, S. 339-342.

Leuders, Timo / Hußmann, Stephan / Barzel, Bärbel / Prediger, Susanne (2011): Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: PM Praxis der Mathematik.

Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.) (2012): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Leuders, Timo / Hußmann, Stephan (2011): Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. In: Mathematik lehren 164, S. 2-10.

Schacht, Florian (2012): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Vergnaud, Gérard (1990): Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In: Nesher, Pearla / Kilpatrick, Jeremy (Hrsg.): Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge, New York: Cambridge University Press, S. 14-30.

Vergnaud, Gérard (1996): The theory of conceptual fields. In Steffe, L.P. / Nesher, P. / Cobb, P. / Goldin, G.A. / Greer, B. (Hrsg.): Theories of Mathematical Learning. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, S. 219-239.